Modélisation numérique de la propagation des ondes guidées dans des milieux périodiques multi-hélicoïdaux

Changwei ZHOU[1], Fabien TREYSSÈDE[1], Patrice CARTRAUD[2]

[1] GeoEND, GERS, IFSTTAR

[2] GeM, Centrale Nantes

14ème Congrès Français d'Acoustique
23-27, Avril, Le Havre

1. Introduction
   - Contexte
   - Objectif
2. Développement théorique
   - Wave Finite Element method dans un milieu périodique plan
   - Système de coordonnées multi-hélicoïdales
   - Wave Finite Element method dans un milieu périodique multi-hélicoïdal
3. Validation numérique
   - Application mono-dimensionnelle sur un brin
   - Application bi-dimensionnelle sur une coque
4. Conclusions et perspectives

Table des matières

Contexte

Ondes guidées mécaniques pour l'évaluation non destructive (END) :

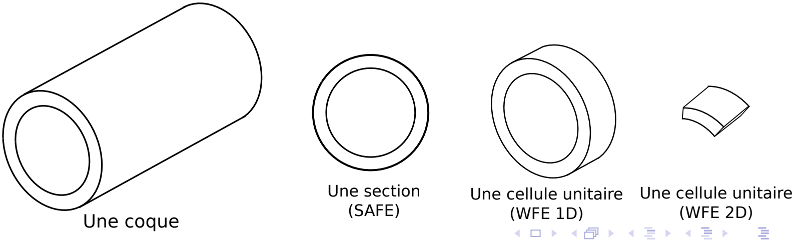
- susceptibles de se propager sur de longues distances
- sensibles à des défauts de petite taille

La nécessité d'avoir des modèles de propagation :

- les ondes guidées sont multimodales et dispersives
- utile pour le dimensionnement des techniques d'END

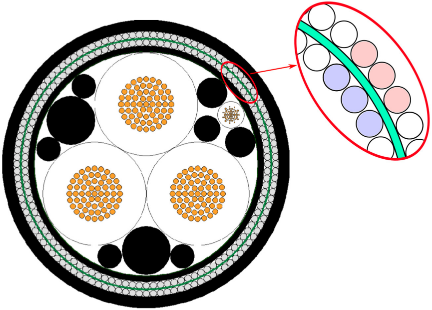
Les méthodes existantes :

- Semi-Analytical Finite Element (SAFE) method modélise juste **une section**
- Wave Finite Element method (WFE) modélise **une cellule unitaire**

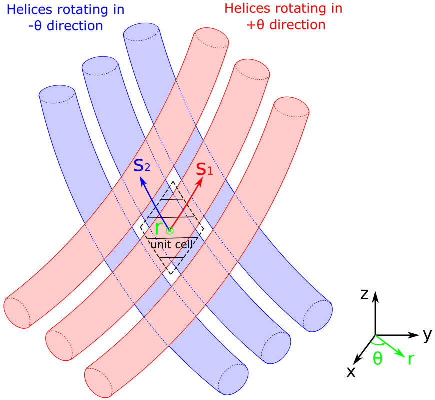


Objectif

- END pour les deux couches d'armure des câbles ombilicaux.
- Développer la théorie pour étudier de la propagation d'onde dans des milieux périodiques multi-hélicoïdaux.



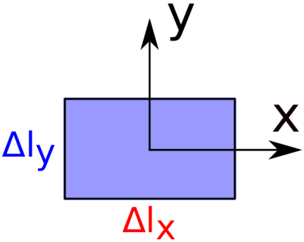
Câbles ombilicaux de transport d'électricité



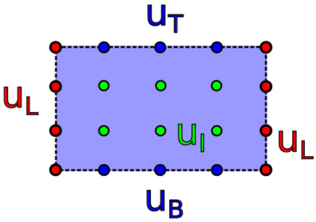
La géométrie multi-hélicoïdale

Table des matières

WFE dans un milieu périodique plan



Cellule unitaire



Cellule unitaire discrétisée

Équation d'équilibre d'une cellule :
(En coordonnés cartésiennes)

$$(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\mathbf{U}=\mathbf{f}$$

Classification des degré de liberté :
[**L**eft, **R**ight, **B**ottom, **T**op, **I**nterne]

$$(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\begin{bmatrix}\mathbf{U}_L\\ \mathbf{U}_R\\ \mathbf{U}_B\\ \mathbf{U}_T\\ \mathbf{U}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_L\\ \mathbf{f}_R\\ \mathbf{f}_B\\ \mathbf{f}_T\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}_I=\mathbf{0}$ en absence de force externe

La condition limite de périodicité (théorème de Floquet-Bloch)

$$\mathbf{U}_R = \lambda_x \mathbf{U}_L, \quad \mathbf{U}_T = \lambda_y \mathbf{U}_B$$
$$\mathbf{f}_R = -\lambda_x \mathbf{f}_L, \quad \mathbf{f}_T = -\lambda_y \mathbf{f}_B$$

où $\lambda_x = \exp(\mathrm{i}k_x \Delta l_x)$ et $\lambda_y = \exp(\mathrm{i}k_y \Delta l_y)$

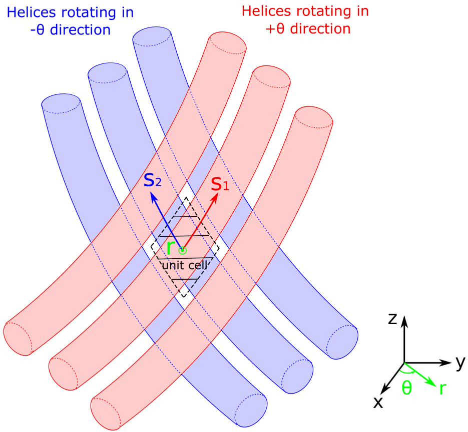
$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_T \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_R \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix}$$

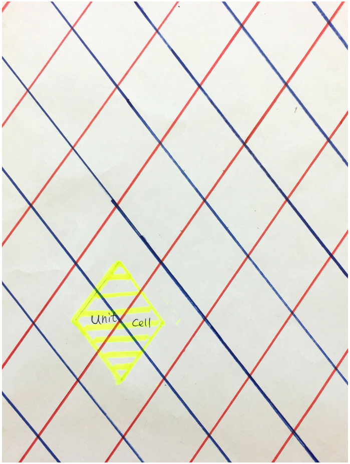
L'équation aux valeurs propres ω à résoudre :

$$(-\omega^2 \mathbf{\Lambda}_{\mathsf{R}}^* \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}_R + \mathbf{\Lambda}_{\mathsf{R}}^* \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}_{\mathsf{R}}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

—> Les ondes de Bloch $(\omega, k_x, k_y, \mathbf{U})$

Mais qu'est ce qu'on fait avec ça ?



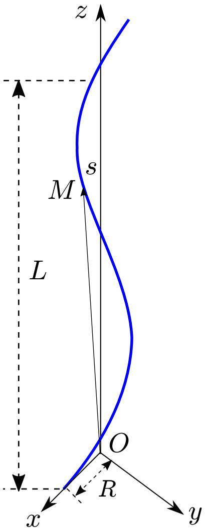


Quelques notations d'hélice

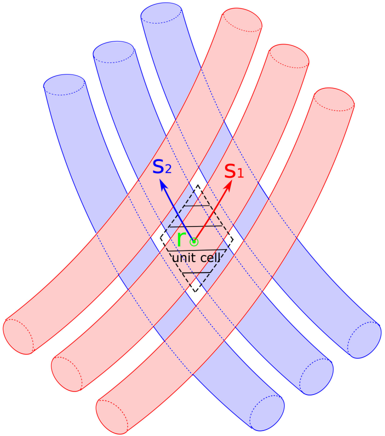
Équation d'une hélice (tournant dans $+\theta$) :

$$\mathbf{OM}(s) = R\cos(2\pi\frac{s}{l})\mathbf{e}_x + R\sin(2\pi\frac{s}{l})\mathbf{e}_y + L\frac{s}{l}\mathbf{e}_z$$

s : coordonnée le long d'hélice
R : rayon du centre d'hélice
θ : angle de l'hélice par rapport à l'axe z
$L = 2\pi R/\tan\theta$: longueur d'une période suivant z
$l = \pi R/\sin\theta$: longueur curviligne d'une période



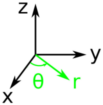
Le système de coordonnées proposé (s_1, s_2, r)



Relation avec les coordonnées cylindriques

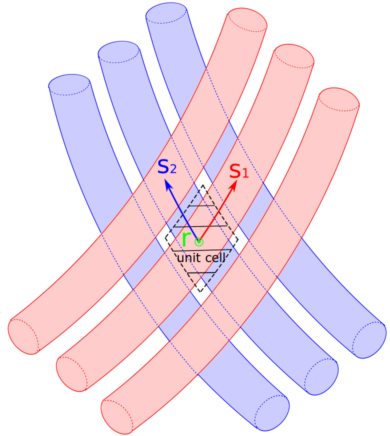
$$\begin{cases} r = r \\ z = L_1 \dfrac{s_1}{l_1} + L_2 \dfrac{s_2}{l_2} \\ \theta = 2\pi(\dfrac{s_1}{l_1} - \dfrac{s_2}{l_2}) \end{cases}$$

Position d'un point de l'espace :



$$\begin{aligned} \mathbf{OM} =& r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z \\ =& r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\theta\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ =& r\cos(2\pi(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}))\mathbf{e}_x + \\ & r\sin(2\pi(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}))\mathbf{e}_y + \\ & (L_1\frac{s_1}{l_1} + L_2\frac{s_2}{l_2})\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

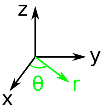
Le système de coordonnées proposé (s_1, s_2, r)



Relation avec les coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} r = r \\ z = L_1 \dfrac{s_1}{l_1} + L_2 \dfrac{s_2}{l_2} \\ \theta = 2\pi(\dfrac{s_1}{l_1} - \dfrac{s_2}{l_2}) \end{cases}$$

Position d'un point de l'espace :



$$\begin{aligned} \mathbf{OM} =& r\mathbf{e}_r(\theta) + z\mathbf{e}_z \\ =& r\cos\theta\mathbf{e}_x + r\sin\theta\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\ =& r\cos(2\pi(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}))\mathbf{e}_x + \\ & r\sin(2\pi(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2}{l_2}))\mathbf{e}_y + \\ & (L_1\frac{s_1}{l_1} + L_2\frac{s_2}{l_2})\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Questions : Peut-on appliquer le théorème de Floquet-Bloch dans ce système ? Si oui, comment ?

Propriété du système multi-hélicoïdal

Variation du vecteur position :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{OM} =& \mathbf{e}_r \mathrm{d}r + r\mathbf{e}_\theta \mathrm{d}\theta + \mathbf{e}_z \mathrm{d}z \\
=& \mathbf{e}_r \mathrm{d}r + r\mathbf{e}_\theta \left(\frac{2\pi}{l_1}\mathrm{d}s_1 - \frac{2\pi}{l_2}\mathrm{d}s_2\right) + \mathbf{e}_z\left(\frac{L_1}{l_1}\mathrm{d}s_1 + \frac{L_2}{l_2}\mathrm{d}s_2\right) \\
=& \mathbf{e}_r \mathrm{d}r + \left(\frac{2\pi r}{l_1}\mathbf{e}_\theta + \frac{L_1}{l_1}\mathbf{e}_z\right)\mathrm{d}s_1 + \left(-\frac{2\pi r}{l_2}\mathbf{e}_\theta + \frac{L_2}{l_2}\mathbf{e}_z\right)\mathrm{d}s_2
\end{aligned}
$$

Les vecteurs de la base covariante sont donc :

$$
\begin{cases}
\mathbf{g}_1 = \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_1} = \dfrac{2\pi r}{l_1}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{L_1}{l_1}\mathbf{e}_z \\
\mathbf{g}_2 = \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial s_2} = -\dfrac{2\pi r}{l_2}\mathbf{e}_\theta + \dfrac{L_2}{l_2}\mathbf{e}_z \\
\mathbf{g}_3 = \dfrac{\partial \mathbf{OM}}{\partial r} = \mathbf{e}_r
\end{cases}
$$

Propriété du système multi-hélicoïdal

Expression du tenseur métrique : $(\mathbf{g})_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$

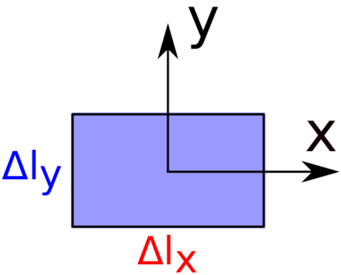
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{4\pi^2 r^2 + L_1^2}{l_1^2} & \dfrac{-4\pi^2 r^2 + L_1 L_2}{l_1 l_2} & 0 \\ \dfrac{-4\pi^2 r^2 + L_1 L_2}{l_1 l_2} & \dfrac{4\pi^2 r^2 + L_2^2}{l_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indépendant de s_1, s_2

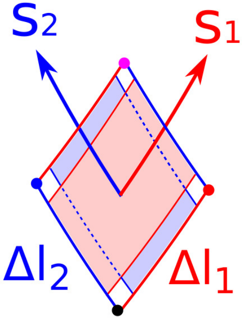
–> La périodicité des coefficients des équations à résoudre est préservée.

—> Ils existent des ondes de Bloch suivant s_1 et s_2.

Définition de la cellule unitaire



Cellule unitaire pour un milieu plan



Cellule unitaire multi-hélicoïdale

Frontière gauche et droite :
$x = \pm \Delta l_x / 2$
Frontière arrière et avant :
$y = \pm \Delta l_y / 2$

Frontière gauche et droite :
$s_1 = \pm \Delta l_1 / 2$
Frontière arrière et avant :
$s_2 = \pm \Delta l_2 / 2$
–> Non planes ! ("rampes" hélicoïdales)

Frontière droite de l'hélice S1

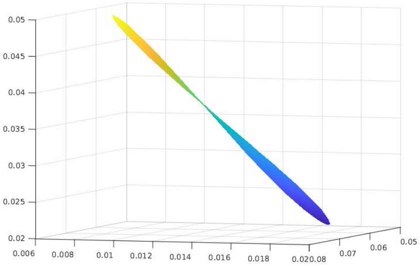
Pour obtenir la surface de la coupe, on doit résoudre s_1 tel que :

$$(R_1 + \rho_1 \cos\varphi_1)\cos(2\pi\frac{s_1}{l_1}) - \rho_1 \sin\varphi_1 \frac{L_1}{l_1}\sin(2\pi\frac{s_1}{l_1}) = \sqrt{(R_1 + \rho_1\cos\varphi_1)^2 + (\rho_1 \sin\varphi_1 \frac{L_1}{l_1})^2}$$

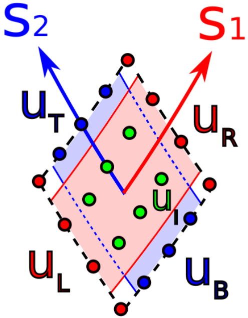
$$\cos(\pi\frac{\Delta l_1}{l_1} + \pi\frac{L_1}{L_2}\frac{\Delta l_1}{l_1} - 2\pi\frac{L_1}{L_2}\frac{s_1}{l_1} + \frac{4\pi^2 R_1\rho_1}{L_2 l_1}\sin\varphi_1)$$

avec $\rho_1 \in [0, a_1]$ and $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.

–> La surface de la coupe n'est pas plane !



WFE dans un milieu périodique multi-hélicoïdal



Équation d'équilibre d'une cellule :
(En coordonnés cartésiennes)

$$(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\mathbf{U}=\mathbf{f}$$

Classification des degré de liberté :
[**L**eft, **R**ight, **B**ottom, **T**op, **I**nterne]

$$(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\begin{bmatrix}\mathbf{U}_L\\\mathbf{U}_R\\\mathbf{U}_B\\\mathbf{U}_T\\\mathbf{U}_I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_L\\\mathbf{f}_R\\\mathbf{f}_B\\\mathbf{f}_T\\\mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}_I=\mathbf{0}$ en absence de force externe

Projection des composantes des vecteurs

Attention : Les conditions de Floquet-Bloch ne peuvent pas être écrites sur les composantes cartésiennes. Il faut les projeter sur la base covariante/contravariante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi r}{l_1}\sin\theta & \frac{2\pi r}{l_1}\cos\theta & \frac{L_1}{l_1} \\ \frac{2\pi r}{l_2}\sin\theta & -\frac{2\pi r}{l_2}\cos\theta & \frac{L_2}{l_2} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{J}$ forment une matrice diagonale par bloc $\mathbb{J}$:

$$\mathbb{J}_R^{-1}\mathbf{U}_R = \lambda_1 \mathbb{J}_L^{-1}\mathbf{U}_L, \quad \mathbb{J}_T^{-1}\mathbf{U}_T = \lambda_2 \mathbb{J}_B^{-1}\mathbf{U}_B$$
$$\mathbb{J}_R^{T}\mathbf{f}_R = -\lambda_1 \mathbb{J}_L^{T}\mathbf{f}_L, \quad \mathbb{J}_T^{T}\mathbf{f}_T = -\lambda_2 \mathbb{J}_B^{T}\mathbf{f}_B$$

L'équation aux valeurs propres ω à résoudre :

$$(-\omega^2 \mathbf{\Lambda}_{\mathsf{R}}^* \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}_R + \mathbf{\Lambda}_{\mathsf{R}}^* \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}_{\mathsf{R}}) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_I \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Relation entre λ_1 et λ_2

Question : Comment trouver la relation qui lie l'un à l'autre ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(\mathrm{i}k_1\Delta l_1) = \exp(\mathrm{i}k_\theta \dfrac{2\pi\Delta l_1}{l_1} + \mathrm{i}k_z \dfrac{L_1\Delta l_1}{l_1}) \\ \lambda_2 = \exp(\mathrm{i}k_2\Delta l_2) = \exp(-\mathrm{i}k_\theta \dfrac{2\pi\Delta l_2}{l_2} + \mathrm{i}k_z \dfrac{L_2\Delta l_2}{l_2}) \end{cases}$$

Relation entre λ_1 et λ_2

Question : Comment trouver la relation qui lie l'un à l'autre ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(\mathrm{i}k_1\Delta l_1) = \exp(\mathrm{i}k_\theta \dfrac{2\pi\Delta l_1}{l_1} + \mathrm{i}k_z \dfrac{L_1\Delta l_1}{l_1}) \\ \lambda_2 = \exp(\mathrm{i}k_2\Delta l_2) = \exp(-\mathrm{i}k_\theta \dfrac{2\pi\Delta l_2}{l_2} + \mathrm{i}k_z \dfrac{L_2\Delta l_2}{l_2}) \end{cases}$$

Relation entre λ_1 et λ_2

Question : Comment trouver la relation qui lie l'un à l'autre ?

$$\begin{cases} \lambda_1 = \exp(\mathrm{i}k_1 \Delta l_1) = \exp(\mathrm{i}k_\theta \dfrac{2\pi \Delta l_1}{l_1} + \mathrm{i}k_z \dfrac{L_1 \Delta l_1}{l_1}) \\ \lambda_2 = \exp(\mathrm{i}k_2 \Delta l_2) = \exp(-\mathrm{i}k_\theta \dfrac{2\pi \Delta l_2}{l_2} + \mathrm{i}k_z \dfrac{L_2 \Delta l_2}{l_2}) \end{cases}$$

on a donc :

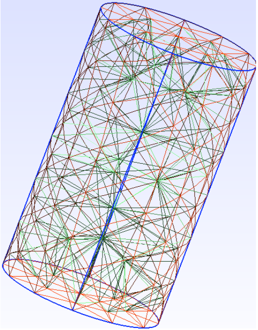
$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2\pi}{l_1} k_\theta + \dfrac{L_1}{l_1} k_z \\ k_2 = -\dfrac{2\pi}{l_2} k_\theta + \dfrac{L_2}{l_2} k_z \end{cases}$$

Par analogie avec le cas cylindrique, $k_\theta = n$. n corresponds à différent ordre circonférentiel.
Donc on peut fixer $k_\theta = n$ et faire varier k_z (qui détermine λ_1 et λ_2), pour résoudre ω.

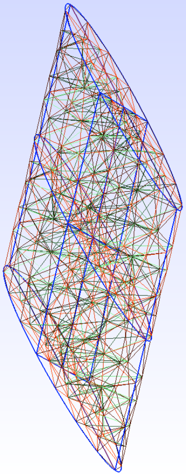
Table des matières

Validation sur un brin

Un brin hélicoïdal selon S1



Référence[1] : système 'mono'-hélicoïdal (Serret-Frenet) avec cellule coupée $\perp$ à S1



Système multi-hélicoïdal : cellule coupée par $s_1 = \pm\Delta l_1/2$

[1]. Treyssède, F. (2007). Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides. The Journal of the Acoustical Society of America, 121(6), 3398–408.

Courbes de dispersion (ω, k) ou (c_e, k)

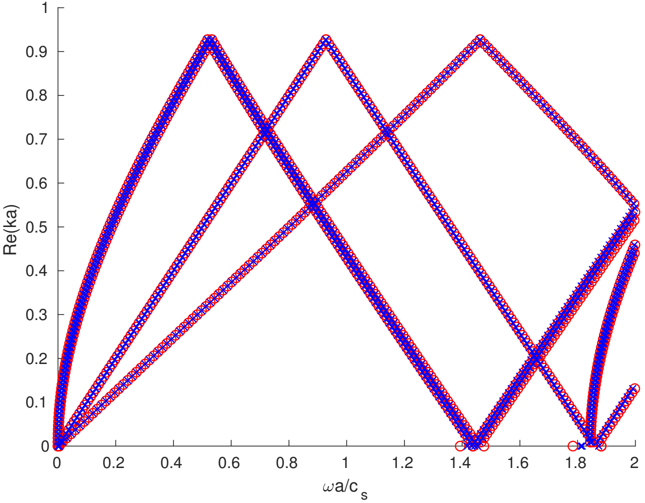


Figure – Référence (o), Système multi-hélicoïdal (x)

Courbes de dispersion (ω, k) ou (c_e, k)

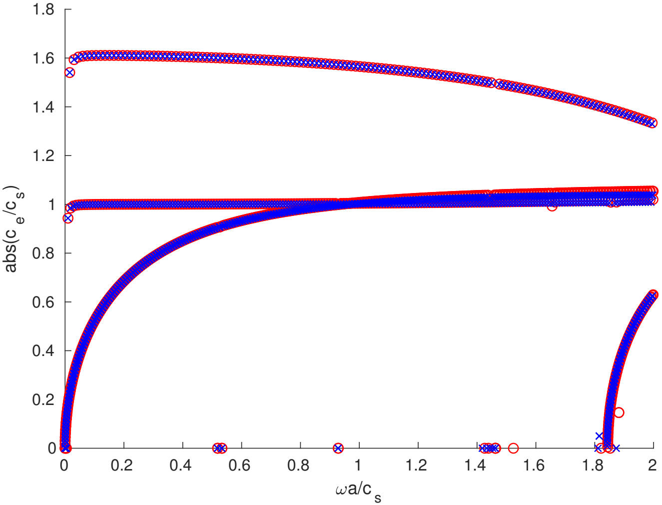
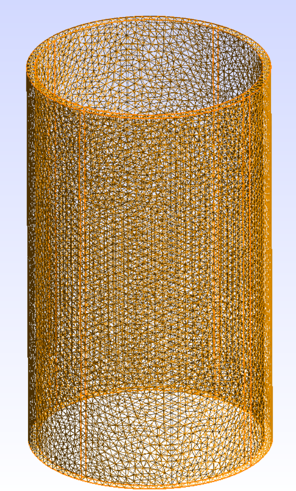
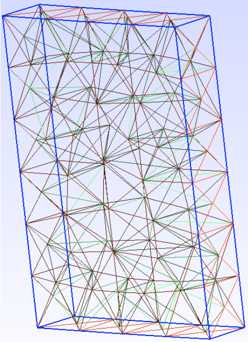


Figure – Référence (o), Système multi-hélicoïdal (x)

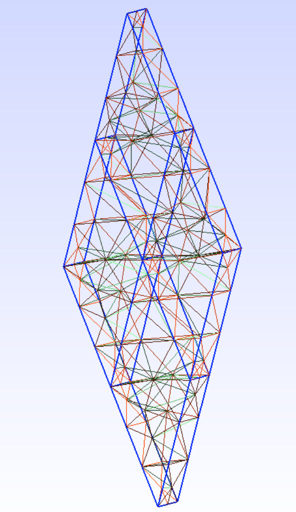
Validation sur une coque



Une coque



Référence : coupe droite
(i.e. selon θ et z)



Système multi-hélicoïdal : cellule coupée par $s_1 = \pm\Delta l_1/2$ et $s_2 = \pm\Delta l_2/2$

Courbes de dispersion

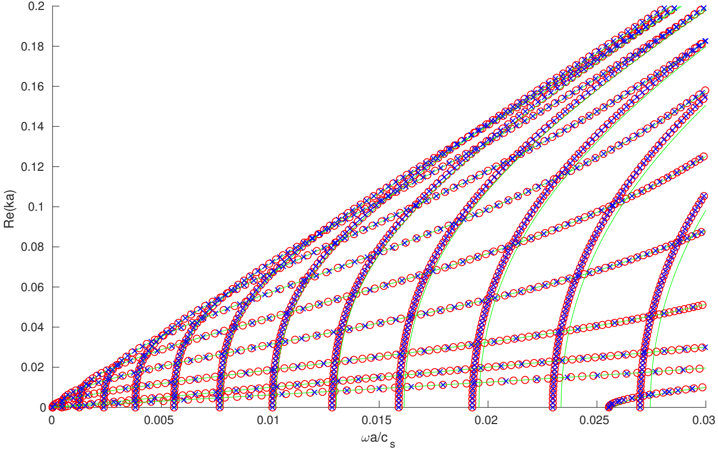


Figure – Référence (o), système multi-hélicoïdal (x), Analytique Flugge (–)

Courbes de dispersion

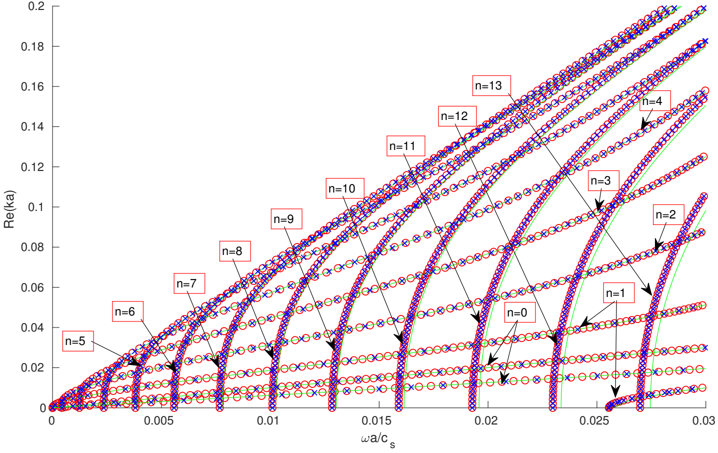


Figure – Référence (o), système multi-hélicoïdal (x), Analytique Flugge (–)

Table des matières

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Développement théorique
- Implémentation numérique
- Validations préliminaires sur un brin (1D) et une coque (2D)

Travaux futurs

- Étude numérique sur les deux couches d'hélices (en simplifiant le contact)
- Validation expérimentale